Ova lekcija je posuđena iz knjige "Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike", autora Silvia Gilezan, Ljubo Nedović, Zorana Lužanin, Zoran Ovcin, Tatjana Grbić, Jelena Ivetić, Biljana Mihailović, Ksenija Doroslovački, izdanje Novi Sad, 2009. godine

2.4 Transformacije i brojne karakteristike slučajnih promenljivih

Transformacije slučajnih promenljivih

Neka je X slučajna promenljiva i neka je g funkcija koja preslikava $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$. Tada je $Y = g(X(\omega))$, kraće pišemo $Y = g(X)$, slučajna promenljiva koja je dobijena transformacijom slučajne promenljive X.

Ako je X diskretnog tipa sa zakonom raspodele

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m & \dots \\ \mathsf{p}(x_1) & \mathsf{p}(x_2) & \dots & \mathsf{p}(x_m) & \dots \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

tada je očigledno $Y = g(X)$ takođe slučajna promenljiva diskretnog tipa. Neka je $\mathcal{R}_Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ skup vrednosti slučajne promenljive Y, tj.

$$g : \{x_1, x_2, \dots\} \to \{y_1, y_2, \dots\}. \tag{2.38}$$

Sa $\mathsf{p}(y_j)$ označavamo verovatnoću događaja čiji se elementi preslikavaju u y_j, tada je

$$\mathsf{p}(y_j) = \mathsf{P}(Y = y_j) = \sum_{i\,:\,g(x_i)=y_j} \mathsf{p}(x_i) = \sum_{i\,:\,g(x_i)=y_j} \mathsf{P}(X = x_i). \tag{2.39}$$

Tada je zakon raspodele slučajne promenljive Y dobijene transformacijom slučajne promenljive X

$$Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_k & \dots \\ \mathsf{p}(y_1) & \mathsf{p}(y_2) & \dots & \mathsf{p}(y_k) & \dots \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Ako je X neprekidnog tipa, sa funkcijom gustine φ_X i funkcijom raspodele F_X, i g monotono rastuća neprekidna funkcija, tada je

$$F_Y(y) = F_X\left(g^{-1}(y)\right), \tag{2.41}$$

$$\varphi_Y(y) = \varphi_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot (g^{-1}(y))'. \tag{2.42}$$

Ako je X neprekidnog tipa, sa funkcijom gustine φ_X i funkcijom raspodele F_X, i g monotono opadajuća neprekidna funkcija, tada je

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right), \tag{2.43}$$

$$\varphi_Y(y) = -\varphi_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot (g^{-1}(y))'. \tag{2.44}$$

Ako je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa i $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tj. $g(x, y) = z$, tada slučajnu promenljivu (X, Y) transformišemo u jednu slučajnu promenljivu, $Z = g(X, Y)$, čiji je skup vrednosti $\mathcal{R}_Z = \{z_1, z_2, \dots\}$, tj.

$$g : \mathcal{R}_{X,Y} \longrightarrow \{z_1, z_2, \dots\}, \tag{2.45}$$

a odgovarajuće verovatnoće

$$\mathsf{p}(z_k) = \mathsf{P}\left(Z = z_k\right) = \sum_{i,j\,:\,g(x_i,y_j)=z_k} \mathsf{p}(x_i, y_j). \tag{2.46}$$

Brojne karakteristike slučajnih promenljivih

Matematičko očekivanje $\mathsf{E}\left(X\right)$ slučajne promenljive X je broj definisan sa

$$\mathsf{E}\left(X\right) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i \; \mathsf{p}(x_i) & , \quad X \text{ diskretna slučajna promenljiva} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \; \varphi_X\left(x\right) \; dx & , \quad X \text{ neprekidna slučajna promenljiva} \end{cases}, \tag{2.47}$$

pod uslovom da odgovarajući red, odnosno inetegral apsolutno konvergira.

Za matematičko očekivanje važe sledeće osobine

$$\mathsf{E}\left(c\right) = c, \quad \text{gde je } \; c \; \text{ konstanta.} \tag{2.48}$$

$$\mathsf{E}\left(X+Y\right) = \mathsf{E}\left(X\right) + \mathsf{E}\left(Y\right), \text{za sve slučajne promenljive } X \text{ i } Y. \tag{2.49}$$

$$\mathsf{E}\left(cX\right) = c \; \mathsf{E}\left(X\right), \quad \text{gde je } \; c \; \text{ konstanta.} \tag{2.50}$$

Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je

$$\mathsf{E}\left(XY\right) = \mathsf{E}\left(X\right) \; \mathsf{E}\left(Y\right). \tag{2.51}$$

Ako je $Y = g(X)$ transformacija slučajne promenljive X tada je

$$\mathsf{E}\left(Y\right) = \begin{cases} \sum\limits_i g(x_i) \; \mathsf{p}(x_i) & , \quad X \text{ diskretna slučajna promenljiva} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) \; \varphi_X\left(x\right) \; dx & , \quad X \text{ neprekidna slučajna promenljiva} \end{cases}, \tag{2.52}$$

U specijalnom slučaju, $Y = X^\alpha$ važi

$$\mathsf{E}\left(Y\right) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^\alpha \; \mathsf{p}(x_i) & , \quad X \text{ diskretna slučajna promenljiva} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^\alpha \; \varphi_X\left(x\right) \; dx & , \quad X \text{ neprekidna slučajna promenljiva} \end{cases}, \tag{2.53}$$

$\mathsf{E}\left(X^k\right)$, $k \in \mathbb{N}$ se nazivaju momenti reda k slučajne promenljive X.

Disperzija $\mathsf{D}\left(X\right)$ slučajne promenljive X je definisana sa

$$\mathsf{D}\left(X\right) = \mathsf{E}\left(\left(X - \mathsf{E}\left(X\right)\right)^2\right). \tag{2.54}$$

Često se za nalaženje disperzije koristi izraz

$$\mathsf{D}\left(X\right) = \mathsf{E}\left(X^2\right) - \mathsf{E}\left(X\right)^2. \tag{2.55}$$

Standardno odstupanje slučajne promenljive se definiše kao kvadratni koren disperzije.

Za disperziju važe sledeće osobine

$$\mathsf{D}\left(c\right) = 0, \quad \text{za svaku konstantu } \; c. \tag{2.56}$$

$$\mathsf{D}\left(X\right) \geq 0. \tag{2.57}$$

$$\mathsf{D}\left(cX\right) = c^2 \; \mathsf{D}\left(X\right), \quad \text{gde je } \; c \; \text{ konstanta.} \tag{2.58}$$

$$\mathsf{D}\left(X+c\right) = \mathsf{D}\left(X\right), \quad \text{gde je } \; c \; \text{ konstanta.} \tag{2.59}$$

Za nezavisne slučajne promenljive X i Y je: $\mathsf{D}\left(X+Y\right) = \mathsf{D}\left(X\right) + \mathsf{D}\left(Y\right)$. (2.60)

Ako slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(n,p)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}\left(X\right) = n\,p, \qquad \mathsf{D}\left(X\right) = n\,p\,q\,. \tag{2.61}$$

Ako slučajna promenljiva X ima Poasonovu $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}(X) = \lambda, \qquad \mathsf{D}(X) = \lambda\,. \tag{2.62}$$

Ako slučajna promenljiva X ima geometrijsku $\mathcal{G}(p)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}(X) = \tfrac{1}{p}, \qquad \mathsf{D}(X) = \tfrac{q}{p^2}\,. \tag{2.63}$$

Ako slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(a,b)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}(X) = \tfrac{a+b}{2}, \qquad \mathsf{D}(X) = \tfrac{(b-a)^2}{12}\,. \tag{2.64}$$

Ako slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(a)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}(X) = \tfrac{1}{a}, \qquad \mathsf{D}(X) = \tfrac{1}{a^2}\,. \tag{2.65}$$

Ako slučajna promenljiva X ima normalnu $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}(X) = m, \qquad \mathsf{D}(X) = \sigma^2\,. \tag{2.66}$$

---

[128] *Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele* $X : \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$. *Neka je* $Y = 2X+3, \quad Z = X^2 \quad i \quad T = X^3 - X^2$.

(a) *Naći zakon raspodele za slučajne promenljive* $Y,\ Z\ \ i\ \ T$.

(b) *Izračunati matematičko očekivanje za slučajne promenljive* $X,\ Y,\ Z\ \ i\ \ T$.

(c) *Izračunati disperziju za slučajne promenljive* $X,\ Y,\ Z\ \ i\ \ T$.

Rešenje:

(a) Primenom (2.38) imamo da je $\mathcal{R}_Y = \{1,9,11\}$ skup vrednosti slučajne promenljive $Y = 2X+3$. Korišćenjem (2.39) dobijamo da su tražene verovatnoće

$\mathsf{P}(Y=1) = \mathsf{P}(X=-1) = 0.4, \qquad \mathsf{P}(Y=9) = \mathsf{P}(X=3) = 0.5,$

$\mathsf{P}(Y=11) = \mathsf{P}(X=4) = 0.1,$

tako da je traženi zakon raspodele $Y : \begin{pmatrix} 1 & 9 & 11 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Za slučajnu promenljivu $Z = X^2$ imamo da je $\mathcal{R}_Z = \{1,9,16\}$ njen skup vrednosti, pa primenom (2.39) dobijamo da su odgovarajuće verovatnoće

$\mathsf{P}(Z=1) = \mathsf{P}(X=-1) = 0.4, \qquad \mathsf{P}(Z=9) = \mathsf{P}(X=3) = 0.5,$

$\mathsf{P}(Z=16) = \mathsf{P}(X=4) = 0.1,$

tako da je zakon raspodele slučajne promenljive $Z : \begin{pmatrix} 1 & 9 & 16 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Analogno, za slučajnu promenljivu $T = X^3 - X^2$ imamo da je $\mathcal{R}_T = \{-2,18,48\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(T=-2) = \mathsf{P}(X=-1) = 0.4, \qquad \mathsf{P}(T=18) = \mathsf{P}(X=3) = 0.5,$

$\mathsf{P}(T=48) = \mathsf{P}(X=4) = 0.1,$

i tražena slučajna promenljiva je $T : \begin{pmatrix} -2 & 18 & 48 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.

(b) Prvo ćemo izračunati matematičko očekivanje za sve date slučajne promenljive primenom (2.47)

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X) &= -1\cdot 0.4 + 3\cdot 0.5 + 4\cdot 0.1 = 1.5,\\
\mathsf{E}(Y) &= 1\cdot 0.4 + 9\cdot 0.5 + 11\cdot 0.1 = 6,\\
\mathsf{E}(Z) &= 1\cdot 0.4 + 9\cdot 0.5 + 16\cdot 0.1 = 6.5,\\
\mathsf{E}(T) &= -2\cdot 0.4 + 18\cdot 0.5 + 48\cdot 0.1 = 13.
\end{aligned}$$

Korišćenjem osobina (2.49), (2.50) i (2.53) matematičkog očekivanja, zadatak možemo uraditi i na drugi način[3]

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(Y) &= \mathsf{E}(2X+3) = 2\ \mathsf{E}(X) + 3 = 2\cdot 1.5 + 3 = 6,\\
\mathsf{E}(Z) &= \mathsf{E}\left(X^2\right) = (-1)^2\cdot 0.4 + 3^2\cdot 0.5 + 4^2\cdot 0.1 = 6.5,\\
\mathsf{E}(T) &= \mathsf{E}\left(X^3 - X^2\right) = \mathsf{E}\left(X^3\right) - \mathsf{E}\left(X^2\right) =\\
&= (-1)^3\cdot 0.4 + 3^3\cdot 0.5 + 4^3\cdot 0.1 - 6.5 = 13.
\end{aligned}$$

(c) Korišćenjem (2.55) i (2.53) imamo da je

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}(X) &= \mathsf{E}\left(X^2\right) - \mathsf{E}(X)^2 = 6.5 - 1.5^2 = 4.25,\\
\mathsf{D}(Y) &= \mathsf{E}\left(Y^2\right) - \mathsf{E}(Y)^2 = (1^2\cdot 0.4 + 9^2\cdot 0.5 + 11^2\cdot 0.1) - 6^2 = 17,\\
\mathsf{D}(Z) &= \mathsf{E}\left(Z^2\right) - \mathsf{E}(Z)^2 = (1^2\cdot 0.4 + 9^2\cdot 0.5 + 16^2\cdot 0.1) - 6.5^2 = 24.25,\\
\mathsf{D}(T) &= \mathsf{E}\left(T^2\right) - \mathsf{E}(T)^2 = ((-2)^2\cdot 0.4 + 18^2\cdot 0.5 + 48^2\cdot 0.1) - 13^2 = 225.
\end{aligned}$$

Za slučajne promenljive Y i Z ćemo izračunati disperziju i na drugi način, koristeći osobine disperzije (2.58) i (2.59) i osobinu matematičkog očekivanja (2.53),

$$\begin{aligned}
&\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(2X+3) = 2^2\ \mathsf{D}(X) = 4\cdot 4.25 = 17,\\
&\mathsf{D}(Z) = \mathsf{D}\left(X^2\right) = \mathsf{E}\left(\left(X^2\right)^2\right) - \mathsf{E}\left(X^2\right)^2 = \mathsf{E}\left(X^4\right) - \mathsf{E}\left(X^2\right)^2 =\\
&= ((-1)^4\cdot 0.4 + 3^4\cdot 0.5 + 4^4\cdot 0.1) - 6.5^2 = 24.25.
\end{aligned}$$

---

[129] *Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele*

$$X:\ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Izračunati verovatnoće* $\mathsf{P}(X < 0.5)$, $\mathsf{P}(2X+1 < 3)$, $\mathsf{P}\left(X^2 < 1.2\right)$ *i* $\mathsf{P}(2 - X < -1)$.

(b) *Naći zakon raspodele za slučajnu promenljivu* $Y = X^2$ *i slučajnu promenljivu* $Z = X^2 + 1$.

(c) *Izračunati matematičko očekivanje i disperziju za slučajne promenljive* X, Y *i* Z.

[3] Ovaj način je prikladan za izračunavanje matematičkog očekivanja slučajnih promenljivih čije zakone raspodela nemamo, a one su dobijene transformacijom slučajne promenljive čije očekivanje je poznato.

Rešenje:

(a) Tražene verovatnoće su

$$\mathsf{P}(X<0.5)=\mathsf{P}(X=-2)+\mathsf{P}(X=-1)+\mathsf{P}(X=0)=0.7,$$
$$\mathsf{P}(2X+1<3)=\mathsf{P}(X<1)=\mathsf{P}(X=-2)+\mathsf{P}(X=-1)+\mathsf{P}(X=0)=0.7,$$
$$\mathsf{P}\left(X^2<1.2\right)=\mathsf{P}(-1.2<X<1.2)=$$
$$=\mathsf{P}(X=-1)+\mathsf{P}(X=0)+\mathsf{P}(X=1)=0.8,$$
$$\mathsf{P}(2-X<-1)=\mathsf{P}(X>3)=0.$$

(b) Primenjujući (2.38) dobijamo da je $\mathcal{R}_Y=\{0,1,4\}$ skup vrednosti slučajne promenljive Y, pa primenom (2.39) izračunavamo potrebne verovatnoće

$$\mathsf{P}(Y=0)=\mathsf{P}(X=0)=0.4,$$
$$\mathsf{P}(Y=1)=\mathsf{P}(X=-1)+\mathsf{P}(X=1)=0.2+0.2=0.4,$$
$$\mathsf{P}(Y=4)=\mathsf{P}(X=-2)+\mathsf{P}(X=2)=0.1+0.1=0.2,$$

tako da je traženi zakon raspodele $Y:\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ 0.4 & 0.4 & 0.2\end{pmatrix}$.

Analogno, dobijamo da je $\mathcal{R}_Z=\{1,2,5\}$ skup vrednosti slučajne promenljive Z, a odgovarajuće verovatnoće su

$$\mathsf{P}(Z=1)=\mathsf{P}(X=0)=0.4,$$
$$\mathsf{P}(Z=2)=\mathsf{P}(X=-1)+\mathsf{P}(X=1)=0.2+0.2=0.4,$$
$$\mathsf{P}(Z=5)=\mathsf{P}(X=-2)+\mathsf{P}(X=2)=0.1+0.1=0.2,$$

tako da je zakon raspodele slučajne promenljive $Z:\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0.4 & 0.4 & 0.2\end{pmatrix}$.

(c) Primenom (2.47), (2.53) i (2.55) računamo matematičko očekivanje i disperziju za slučajne promenljive X, Y i Z

$$\mathsf{E}(X)=-2\cdot0.1-1\cdot0.2+0\cdot0.4+1\cdot0.2+2\cdot0.1=0,$$
$$\mathsf{E}\left(X^2\right)=(-2)^2\cdot0.1+(-1)^2\cdot0.2+0^2\cdot0.4+1^2\cdot0.2+2^2\cdot0.1=1.2,$$
$$\mathsf{D}(X)=1.2-0^2=1.2,$$
$$\mathsf{E}(Y)=0\cdot0.4+1\cdot0.4+4\cdot0.2=1.2,$$
$$\mathsf{E}\left(Y^2\right)=0^2\cdot0.4+1^2\cdot0.4+4^2\cdot0.2=3.6,$$
$$\mathsf{D}(Y)=3.6-1.2^2=2.16,$$
$$\mathsf{E}(Z)=1\cdot0.4+2\cdot0.4+5\cdot0.2=2.2,$$
$$\mathsf{E}\left(Z^2\right)=1^2\cdot0.4+2^2\cdot0.4+5^2\cdot0.2=7,$$
$$\mathsf{D}(Z)=7-2.2^2=2.16.$$

Koristeći (2.48), (2.49) i (2.59) matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive Z možemo izračunati i na drugi način

$$\mathsf{E}(Z)=\mathsf{E}\left(X^2+1\right)=\mathsf{E}\left(X^2\right)+1=1.2+1=2.2,$$
$$\mathsf{D}(Z)=\mathsf{D}\left(X^2+1\right)=\mathsf{D}\left(X^2\right)=\mathsf{D}(Y)=2.16.$$

---

[130] *Slučajna promenljiva X je data zakonom raspodele* $X:\begin{pmatrix}-\pi & -\frac{\pi}{2} & 0 & \frac{\pi}{2} & \pi\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{2}{8}\end{pmatrix}$. *Izračunati zakon raspodele, matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive* $Y=\sin X$.

Rešenje: Skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = \{-1, 0, 1\}$, a odgovarajuće verovatnoće računamo primenom (2.39).

$\mathsf{P}(Y=-1) = \mathsf{P}\left(X=-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}$,
$\mathsf{P}(Y=0) = \mathsf{P}(X=-\pi) + \mathsf{P}(X=0) + \mathsf{P}(X=\pi) = \frac{6}{8}$,
$\mathsf{P}(Y=1) = \mathsf{P}\left(X=\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}$,

tako da je traženi zakon raspodele $Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{6}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

Dalje, imamo da je $\mathsf{E}(Y) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0$, $\mathsf{E}\left(Y^2\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$, $\mathsf{D}(Y) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$.

---

[131] *Strelac promašuje metu sa verovatnoćom* $\frac{1}{20}$.

(a) *Ako strelac gađa u metu* 100 *puta, naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive* X *koja predstavlja broj promašaja.*

(b) *Naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive* Y *kojom se može aproksimirati slučajna promenljiva* X *iz ovog zadatka.*

(c) *Ako strelac gađa u metu dok ne promaši, naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive* Z *koja predstavlja broj gađanja.*

(d) *Strelac gađa metu dok ne promaši. Slučajna promenljiva* T *uzima vrednost* 1 *ako je strelac promašio metu u parnom po redu gađanju, a vrednost* -1 *ako je strelac promašio metu u neparnom po redu gađanju. Naći matematičko očekivanje i disperziju za slučajnu promenljivu* T.

Rešenje: Strelac promašuje metu sa verovatnoćom $p = \frac{1}{20}$, a pogađa sa verovatnoćom $q = \frac{19}{20}$.

(a) Slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(100, \frac{1}{20})$ raspodelu, tako da na osnovu (2.61) imamo da je $\mathsf{E}(X) = 100 \cdot \frac{1}{20} = 5$ i $\mathsf{D}(X) = 100 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{4}$.

(b) Primenom (2.8) imamo da za $\lambda = 100 \cdot \frac{1}{20} = 5$ slučajna promenljiva Y ima Poasonovu $\mathcal{P}(5)$ raspodelu tako da je (vidi (2.62)) $\mathsf{E}(Y) = 5$ i $\mathsf{D}(Y) = 5$.

(c) Slučajna promenljiva Z ima geometrijsku $\mathcal{G}(\frac{1}{20})$ raspodelu, tako da na osnovu (2.63) sledi da je $\mathsf{E}(Z) = \dfrac{1}{\frac{1}{20}} = 20$ i $\mathsf{D}(Z) = \dfrac{\frac{19}{20}}{\frac{1}{20^2}} = 380$.

(d) Očigledno je $\mathcal{R}_T = \{-1, 1\}$ skup vrednosti slučajne promenljive T, a odgovarajuće verovatnoće su

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(T=-1) = \mathsf{P}(Z=1) + \mathsf{P}(Z=3) + \mathsf{P}(Z=5) + \cdots = \\
&= \tfrac{1}{20} + (\tfrac{19}{20})^2 \cdot \tfrac{1}{20} + (\tfrac{19}{20})^4 \cdot \tfrac{1}{20} + \cdots = \\
&= \tfrac{1}{20} \cdot (1 + (\tfrac{19}{20})^2 + (\tfrac{19}{20})^4 + \cdots) = \tfrac{1}{20} \cdot \tfrac{1}{1-(\frac{19}{20})^2} = \tfrac{20}{39},
\end{aligned}$$

$$\mathsf{P}(T=1) = 1 - \mathsf{P}(T=-1) = \tfrac{19}{39},$$

tako da slučajna promenljiva T ima zakon raspodele $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{20}{39} & \frac{19}{39} \end{pmatrix}$, a tražene numeričke karakteristike su

$\mathsf{E}(T) = -\frac{20}{39} + \frac{19}{39} = -\frac{1}{39}$, $\mathsf{E}(X^2) = \frac{20}{39} + \frac{19}{39} = 1$, $\mathsf{D}(X) = 1 - (-\frac{1}{39})^2 = \frac{1520}{1521}$.

---

[132] *Dve mašine nezavisno jedna od druge proizvode istu vrstu proizvoda. Slučajna promenljiva X predstavlja broj škartova u toku jednog dana na prvoj mašini, a slučajna promenljiva Y broj škartova na drugoj mašini. Zakoni raspodela za X i Y su*

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Naći zakone raspodela za slučajne promenljive $Z = X^2$, $T = 2Y+1$, $U = X+Y$ i $V = XY$.*

(b) *Izračunati matematičko očekivanje i disperziju za X, Y, Z, T, U i V.*

Rešenje:

(a) Primenom (2.38) i (2.45) dobijamo da su $\mathcal{R}_Z = \{0,1,4,9\}$, $\mathcal{R}_T = \{1,3,5\}$, $\mathcal{R}_U = \{0,1,2,3,4,5\}$ i $\mathcal{R}_V = \{0,1,2,3,4,6\}$ skupovi vrednosti za slučajne promenljive X, Y, Z, T, U i V, redom.

Za slučajnu promenljivu $Z = X^2$ primenom (2.39) dobijamo odgovarajuće verovatnoće

$\mathsf{P}(Z=0) = \mathsf{P}(X=0) = 0.1$, $\mathsf{P}(Z=1) = \mathsf{P}(X=1) = 0.6$
$\mathsf{P}(Z=4) = \mathsf{P}(X=2) = 0.2$, $\mathsf{P}(Z=9) = \mathsf{P}(X=3) = 0.1$

tako da je traženi zakon raspodele $Z : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Primenom (2.39) dobijamo da je

$\mathsf{P}(T=1) = \mathsf{P}(Y=0) = 0.5$, $\mathsf{P}(T=3) = \mathsf{P}(Y=1) = 0.3$
$\mathsf{P}(T=5) = \mathsf{P}(Y=2) = 0.2$,

tako da je traženi zakon raspodele $T : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$.

Kako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, primenjujući (2.46) dobijamo tražene verovatnoće

$\mathsf{P}(U=0) = \mathsf{P}(X=0, Y=0) = \mathsf{P}(X=0)\,\mathsf{P}(Y=0) = 0.1 \cdot 0.5 = 0.05$,
$\mathsf{P}(U=1) = \mathsf{P}(X=0, Y=1) + \mathsf{P}(X=1, Y=0) =$
$= \mathsf{P}(X=0)\,\mathsf{P}(Y=1) + \mathsf{P}(X=1)\,\mathsf{P}(Y=0) = 0.1 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.5 = 0.33$,
$\mathsf{P}(U=2) = \mathsf{P}(X=0, Y=2) + \mathsf{P}(X=1, Y=1) + \mathsf{P}(X=2, Y=2) =$
$= 0.1 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.5 = 0.3$,
$\mathsf{P}(U=3) = \mathsf{P}(X=1, Y=2) + \mathsf{P}(X=2, Y=1) + \mathsf{P}(X=3, Y=0) =$
$= 0.6 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.23$,
$\mathsf{P}(U=4) = \mathsf{P}(X=2, Y=2) + \mathsf{P}(X=3, Y=1) =$
$= 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.3 = 0.07$,
$\mathsf{P}(U=5) = \mathsf{P}(X=3, Y=2) = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02$,

i traženi zakon raspodele je $U:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.05 & 0.33 & 0.3 & 0.23 & 0.07 & 0.02 \end{pmatrix}$.

Analogno, za slučajnu promenljivu V primenom (2.28) dobijamo tražene verovatnoće

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(V=0) &= \mathsf{P}(X=0,Y=0)+\mathsf{P}(X=0,Y=1)+\mathsf{P}(X=0,Y=2)+\\
&\quad+\mathsf{P}(X=1,Y=0)+\mathsf{P}(X=2,Y=0)+\mathsf{P}(X=3,Y=0)=\\
&=0.1\cdot 0.5+0.1\cdot 0.3+0.1\cdot 0.2+0.6\cdot 0.5+0.2\cdot 0.5+0.1\cdot 0.5=\\
&=0.55,\\
\mathsf{P}(V=1) &= \mathsf{P}(X=1,Y=1)=0.6\cdot 0.3=0.18,\\
\mathsf{P}(V=2) &= \mathsf{P}(X=1,Y=2)+\mathsf{P}(X=2,Y=1)=0.6\cdot 0.2+0.2\cdot 0.3=0.18,\\
\mathsf{P}(V=3) &= \mathsf{P}(X=3,Y=1)=0.1\cdot 0.3=0.03,\\
\mathsf{P}(V=4) &= \mathsf{P}(X=2,Y=2)=0.2\cdot 0.2=0.04,\\
\mathsf{P}(V=6) &= \mathsf{P}(X=3,Y=2)=0.1\cdot 0.2=0.02,
\end{aligned}$$

i tražen zakon raspodele slučajne promenljive

$$V:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0.55 & 0.18 & 0.18 & 0.03 & 0.04 & 0.02 \end{pmatrix}.$$

(b) Koristeći (2.47), (2.53) i (2.55) dobijamo tražene numeričke karakteristike

$\mathsf{E}(X)=0.6+0.4+0.3=1.3,$

$\mathsf{E}\left(X^2\right)=0.6+0.8+0.9=2.3,$

$\mathsf{E}(Y)=0.3+0.4=0.7,$

$\mathsf{E}\left(Y^2\right)=0.3+0.8=1.1,$

$\mathsf{E}(Z)=0.6+0.8+0.9=2.3,$

$\mathsf{E}\left(Z^2\right)=0.6+0.32+0.9=1.82,$

$\mathsf{E}(T)=0.5+0.9+1=2.4,$

$\mathsf{E}\left(T^2\right)=0.5+2.7+5=8.2,$

$\mathsf{E}(U)=0.33+0.6+0.69+0.28+0.1=2,$

$\mathsf{E}\left(U^2\right)=0.33+1.2+2.07+1.12+0.5=5.22,$

$\mathsf{E}(V)=0.18+0.36+0.09+0.16+0.12=0.91,$

$\mathsf{E}\left(V^2\right)=0.18+0.72+0.27+0.64+0.72=2.53,$

$\mathsf{D}(X)=0.61,\quad \mathsf{D}(Y)=0.61,\quad \mathsf{D}(Z)=0.61,$

$\mathsf{D}(T)=2.44,\quad \mathsf{D}(U)=1.22,\quad \mathsf{D}(V)=1.7019.$

Primenom osobina (2.48), (2.49), (2.51) i (2.50) matematičkog očekivanja izračunaćemo matematičko očekivanje za slučajne promenljive T, U i V.

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(T) &= \mathsf{E}(2Y+1)=2\ \mathsf{E}(Y)+1=2\cdot 0.7+1=2.4,\\
\mathsf{E}(U) &= \mathsf{E}(X+Y)=\mathsf{E}(X)+\mathsf{E}(Y)=1.3+0.7=2,\\
\mathsf{E}(V) &= \mathsf{E}(XY)=\mathsf{E}(X)\ \mathsf{E}(Y)=1.3\cdot 0.7=0.91.
\end{aligned}$$

Primenjujući (2.58), (2.59) i (2.60) izračunavamo disperzije za slučajne promenljive T i U.

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}(T) &= \mathsf{D}(2Y+1)=4\ \mathsf{D}(Y)=4\cdot 0.61=2.44,\\
\mathsf{D}(U) &= \mathsf{D}(X+Y)=\mathsf{D}(X)+\mathsf{D}(Y)=0.61+0.61=1.22.
\end{aligned}$$

[133] *Neprekidna slučajna promenljiva X data je gustinom*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in [0,2], \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

(a) *Naći raspodelu slučajne promenljive $Y = 2X + 1$.*

(b) *Naći matematičko očekivanje i disperziju za X i Y.*

Rešenje:

(a) Raspodela slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Na osnovu prethodne činjenice i definicije funkcije raspodele je

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(2X+1 < y) = \mathsf{P}(X < \tfrac{y-1}{2}) = \\ &= \begin{cases} 0, & \frac{y-1}{2} \le 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{y-1}{2}\right)^2, & 0 < \frac{y-1}{2} \le 2 \\ 1, & \frac{y-1}{2} > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \le 1, \\ \frac{(y-1)^2}{16}, & 1 < y \le 5, \\ 1, & y > 5. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Koristeći (2.47) dobijamo $\mathsf{E}(X) = \int\limits_0^2 x\,\frac{1}{2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$.

Na osnovu (2.53) dobijamo $\mathsf{E}\left(X^2\right) = \int\limits_0^2 x^2\frac{1}{2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 2$.

Koristeći (2.55) dobijamo $\mathsf{D}(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$.

Iz (2.48) i (2.49) dobija se $\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(2X+1) = 2\,\mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(1) = 2 \cdot \frac{4}{3} + 1 = \frac{11}{3}$, a kako je

$$\varphi_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 0, & y \notin (1,5], \\ \frac{y-1}{8}, & y \in (1,5], \end{cases}$$

i na osnovu (2.53) je

$$\mathsf{E}\left(Y^2\right) = \int\limits_1^5 y^2 \cdot \frac{y-1}{8}\,dy = \frac{1}{8}\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_1^5 = \frac{1}{8}\left(\frac{625}{4} - \frac{125}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{43}{3}.$$

Disperzija slučajne promenljive Y je $\mathsf{D}(Y) = \frac{43}{3} - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$.

Do istog rezultata može se doći pomoću osobina disperzije (2.58) i (2.59), tj.

$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(2X+1) = \mathsf{D}(2X) = 4\,\mathsf{D}(X) = \frac{8}{9}$.

[134] *Neprekidna slučajna promenljiva X data je gustinom*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} a(x-1), & x \in [1,4], \\ 0, & x \notin [1,4]. \end{cases}$$

(a) *Odrediti konstantu a i naći raspodelu slučajne promenljive $Y = 3X - 1$.*

(b) *Naći matematičko očekivanje i disperziju za X i Y.*

Rešenje:

(a) Konstantu a određujemo tako da je zadovoljen uslov: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\, dx = 1$.

$$a\int\limits_1^4 (x-1)\, dx = a\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^4 = a\left(8 - 4 - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{9}{2}a = 1.$$

Dakle $a = \frac{2}{9}$.

Funkcija raspodele slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{(x-1)^2}{9}, & 1 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(3X - 1 < y) = \mathsf{P}(X < \tfrac{y+1}{3}) = F_X\left(\tfrac{y+1}{3}\right) = \\ &= \begin{cases} 0, & \frac{y+1}{3} \leq 1 \\ \frac{(\frac{y+1}{3}-1)^2}{9}, & 1 < \frac{y+1}{3} \leq 4 \\ 1, & \frac{y+1}{3} > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \leq 2, \\ \frac{(y-2)^2}{81}, & 2 < y \leq 11, \\ 1, & y > 11. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Na osnovu (2.47) i (2.53) dobijamo

$\mathsf{E}(X) = \int\limits_1^4 x \cdot \frac{2}{9}(x-1)\, dx = \frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^4 = 3.$

$\mathsf{E}\left(X^2\right) = \int\limits_1^4 x^2 \cdot \frac{2}{9}(x-1)\, dx = \frac{2}{9}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^4 = \frac{57}{6} = 9.5.$

Disperzija slučajne promenljive X je $\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}\left(X^2\right) - \mathsf{E}(X)^2 = 9.5 - 3^2 = 0.5$.

Koristeći osobine očekivanja i disperzije, dobijamo

$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(3X - 1) = 3\,\mathsf{E}(X) - 1 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$ i

$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(3X - 1) = 9\,\mathsf{D}(X) = 9 \cdot 0.5 = 4.5.$

---

[135] *Funkcija raspodele neprekidne slučajne promenljive X je*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{3}, & 1 < x \leq 8, \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

Izračunati matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive X.

Rešenje: Funkcija gustine slučajne promenljive X je

$$\varphi_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (1,8] \\ \frac{2}{9\sqrt[3]{x}}, & x \in (1,8]. \end{cases}$$

Na osnovu (2.47) i (2.53) dobija se

$$\mathsf{E}(X) = \int_1^8 x \cdot \frac{2}{9} x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{2}{9}\int_1^8 x^{\frac{2}{3}}\,dx == \frac{2}{9}\left.\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right|_1^8 = \frac{2}{15}(\sqrt[3]{8}^5 - \sqrt[3]{1}^5) = \frac{62}{15} \quad \text{i}$$

$$\mathsf{E}\left(X^2\right) = \int_1^8 x^2 \cdot \frac{2}{9} x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{2}{9}\int_1^8 x^{\frac{5}{3}}\,dx == \frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8}\left. x^{\frac{8}{3}}\right|_1^8 = \frac{1}{12}(\sqrt[3]{8}^8 - 1) = \frac{85}{4} = 21.25.$$

Disperzija slučajne promenljive X je $\mathsf{D}(X) = \frac{85}{4} - \left(\frac{62}{15}\right)^2 \approx 4.165.$

---

[136] *Funkcija raspodele neprekidne slučajne promenljive X je*

$$F_X(x) = \begin{cases} 3a-1 & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(a) *Odrediti konstantu a i naći gustinu slučajne promenljive X.*

(b) *Naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive $Y = -3X + 2$.*

Rešenje:

(a) Konstantu a određujemo na osnovu osobine $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ funkcije raspodele, te dobijamo da je $3a - 1 = 0$, dakle $a = \frac{1}{3}$, a na osnovu (2.14) dobijamo da je gustina slučajne promenljive X

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0,1], \\ 2x, & x \in (0,1]. \end{cases}$$

(b) $\mathsf{E}(X) = \int\limits_0^1 x \cdot 2x\,dx = 2\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}$, dok je $\mathsf{E}\left(X^2\right) = \int\limits_0^1 x^2 \cdot 2x\,dx = 2\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$.

Disperzija slučajne promenljive X je $\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}\left(X^2\right) - \mathsf{E}(X)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$.

Matematičko očekivanje i disperzija slučajne promenljive Y su

$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(-3X+2) = -3\,\mathsf{E}(X) + 2 = -3\cdot\frac{2}{3} + 2 = 0$ i

$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(-3X+2) = 9\,\mathsf{D}(X) = 9\cdot\frac{1}{18} = 0.5.$

---

[137] *Neprekidna slučajna promenljiva X ima gustinu*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [1,e], \\ \ln x, & x \in [1,e]. \end{cases}$$

(a) *Naći raspodelu slučajne promenljive* $Y = eX - 1$.

(b) *Izračunati očekivanje i disperziju za* X *i* Y.

Rešenje:

(a) Prvo ćemo odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X. Kako važi da je $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_X(x)\, dx$, za fiksirano $x \in (1, e]$ je

$$F_X(x) = \int_1^x \ln t \, dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{parcijalna integracija :} \\ u = \ln t \;\; \text{i} \;\; dv = dt \\ du = \frac{dt}{t} \qquad v = t \end{array} \right\} =$$

$$= t \ln t|_1^x - \int_1^x dt = x \ln x - t|_1^x = x \ln x - x + 1.$$

Dakle, funkcija raspodele slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 1 + x \ln \frac{x}{e}, & 1 < x \le e, \\ 1, & x > e. \end{cases}$$

Sada ćemo po definiciji i na osnovu prethodnog rezultata odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive Y.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(eX - 1 < y) = \mathsf{P}(X < \tfrac{y+1}{e}) = F_X\left(\tfrac{y+1}{e}\right) = \\ &= \begin{cases} 0, & \frac{y+1}{e} \le 1 \\ 1 + \frac{y+1}{e} \ln \frac{y+1}{e^2}, & 1 < \frac{y+1}{e} \le e \\ 1, & \frac{y+1}{3} > e \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & y \le e - 1, \\ 1 + \frac{y+1}{e} \ln \frac{y+1}{e^2}, & e - 1 < y \le e^2 - 1, \\ 1, & y > e^2 - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Na osnovu (2.47) je

$$\mathsf{E}(X) = \int\limits_1^e x \cdot \ln x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{parcijalna integracija :} \\ u = \ln x \;\; \text{i} \;\; dv = xdx \\ du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int\limits_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Očekivanje za Y možemo izračunati pomoću osobina (2.48) i (2.49)

$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(eX - 1) = e\,\mathsf{E}(X) - 1 = e \cdot \frac{e^2+1}{4} - 1 = \frac{e^3+e-4}{4} \approx 4.7.$

Kako je

$$\mathsf{E}\left(X^2\right) = \int\limits_1^e x^2 \cdot \ln x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{parcijalna integracija :} \\ u = \ln x \;\; \text{i} \;\; dv = x^2 dx \\ du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9}\Big|_1^e \approx 4.575,$$

disperzija slučajne promenljive X je

$\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2 = 4.575 - (2.097)^2 \approx 0.1776.$

Koristeći (2.58) i (2.59) dobijamo

$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(eX - 1) = e^2\,\mathsf{D}(X) \approx 1.312.$

---

[138] *Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(2,4)$ raspodelu. Neka je slučajna promenljiva $Y = -2X + 5$.*

(a) *Naći raspodelu slučajne promenljive Y.*

(b) *Izračunati matematičko očekivanje i disperziju slučajnih promenljivih X i Y.*

Rešenje:

(a) Funkcija raspodele slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ \frac{x-2}{2}, & 2 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Na osnovu prethodne činjenice i definicije funkcije raspodele sledi

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(-2X + 5 < y) = \mathsf{P}(X \ge -\tfrac{y-5}{2}) = \\ &= 1 - F_X\left(-\tfrac{y-5}{2}\right) = 1 - \begin{cases} 0, & -\frac{y-5}{2} \le 2, \\ \frac{-\frac{y-5}{2}-2}{2}, & 2 < -\frac{y-5}{2} \le 4, \\ 1, & -\frac{y-5}{2} > 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Dakle,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le -3, \\ \frac{y+3}{4}, & -3 < y \le 1, \\ 1, & y > 1, \end{cases}$$

odnosno slučajna promenljiva Y ima uniformnu raspodelu $Y : \mathcal{U}(-3,1)$.

(b) Na osnovu (2.64) dobijamo

$\mathsf{E}(X) = \frac{2+4}{2} = 3$, $\mathsf{D}(X) = \frac{(4-2)^2}{12} = \frac{1}{3}$, $\mathsf{E}(Y) = \frac{-3+1}{2} = -1$ i $\mathsf{D}(Y) = \frac{(1+3)^2}{12} = \frac{4}{3}$.

---

[139] *Nezavisne slučajne promenljive X i Y date su gustinama*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2), & x \in [-1,1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases}, \quad \varphi_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & y \in [0,1] \\ 0, & y \notin [0,1] \end{cases}.$$

(a) *Naći matematičko očekivanje i disperziju za X i Y.*
(b) *Naći očekivanje za $Z = -2X^2 - 3$ i $T = \sqrt{Y} + 2$.*
(c) *Naći očekivanje i disperziju za $X + Y$, XY i $(X + Y)^2$.*

Rešenje: (a) Na osnovu (2.47) je

$$\mathsf{E}(X) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} x(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 0$$

i $\mathsf{E}(Y) = 2\int_0^1 y(1-y)\,dy = 2\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$. Koristeći (2.53) dobija se

$$\mathsf{E}\left(X^2\right) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

i $\mathsf{E}\left(Y^2\right) = 2\int_0^1 y^2(1-y)\,dy = 2\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$.

Disperziju izračunavamo na osnovu (2.55) tj.

$\mathsf{D}(X) = \frac{1}{5} - 0^2 = \frac{1}{5}$ i $\mathsf{D}(Y) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$.

(b) Na osnovu osobina matematičkog očekivanja (2.48), (2.49) i (2.53) dobija se

$$\mathsf{E}(Z) = \mathsf{E}\left(-2X^2 - 3\right) = -2\,\mathsf{E}\left(X^2\right) + \mathsf{E}(-3) = -2\cdot\frac{1}{5} - 3 = -\frac{17}{5}$$

$\mathsf{E}(T) = \mathsf{E}\left(\sqrt{Y} + 2\right) = \mathsf{E}\left(\sqrt{Y}\right) + \mathsf{E}(2) = \frac{8}{15} + 2 = \frac{38}{15}$, jer je

$$\mathsf{E}\left(\sqrt{Y}\right) = \int_0^1 \sqrt{y}\cdot 2(1-y)\,dy = 2\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{15}.$$

(c) $\mathsf{E}(X+Y) = \mathsf{E}(X+Y) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Zbog nezavisnosti slučajnih promenljivih X i Y je

$\mathsf{E}(XY) = \mathsf{E}(X)\cdot\mathsf{E}(Y) = 0\cdot\frac{1}{3} = 0$.

$\mathsf{E}\left((X+Y)^2\right) = \mathsf{E}\left(X^2 + 2XY + Y^2\right) = \mathsf{E}\left(X^2\right) + 2\,\mathsf{E}(XY) + \mathsf{E}\left(Y^2\right) = \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}$.

Zbog nezavisnosti X i Y je

$\mathsf{D}(X+Y) = \mathsf{D}(X) + \mathsf{D}(Y) = \frac{1}{5} + \frac{1}{18} = \frac{23}{90}$.

$\mathsf{D}(XY) = \mathsf{E}\left((XY)^2\right) - \mathsf{E}(XY)^2 = \mathsf{E}\left(X^2\right)\mathsf{E}\left(Y^2\right) - (\mathsf{E}(XY))^2 = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} - 0^2 = \frac{1}{30}$.

Momenti reda tri i četiri slučajnih promenljivih X i Y su

$$\mathsf{E}\left(X^3\right) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} x^3(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0,$$

$$\mathsf{E}\left(X^4\right) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} x^4(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{35},$$

$$\mathsf{E}\left(Y^3\right) = 2\int_0^1 y^3(1-y)\,dy = 2\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{10}$$

i

$$\mathsf{E}\left(Y^4\right) = 2\int_0^1 y^4(1-y)\,dy = 2\left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{15}.$$

Iz osobina (2.48), (2.49) i nezavisnosti X i Y dobijamo

$\mathsf{E}\left((X+Y)^4\right) = \mathsf{E}\left(X^4 + 4X^3Y + 6X^2Y^2 + 4XY^3 + Y^4\right) =$

$= \mathsf{E}\left(X^4\right) + 4\,\mathsf{E}\left(X^3\right)\mathsf{E}(Y) + 6\,\mathsf{E}\left(X^2\right)\mathsf{E}\left(Y^2\right) + 4\,\mathsf{E}(X)\,\mathsf{E}\left(Y^3\right) + \mathsf{E}\left(Y^4\right) =$

$= \frac{3}{35} + 4\cdot 0\cdot\frac{1}{3} + 6\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot 0\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{37}{105} \approx 0.35$.

Dakle, $\mathsf{D}\left((X+Y)^2\right) = \mathsf{E}\left((X+Y)^4\right) - \left(\mathsf{E}\left((X+Y)^2\right)\right)^2 = \frac{37}{105} - \left(\frac{11}{30}\right)^2 \approx 0.218$.